

Ecl Victor
1^oA
IFS

Olympiades de mathématiques

Exercice 1:

1. 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 ;
196 ; 225 ; 256 ; 289 ; 324 ; 361 ; 400

2. a. 7 est impair

$$7 < 24$$

$$7^2 + 24^2 = 49 + 576$$

$$= 625$$

$$= 25^2, \quad 25 \in \mathbb{N}$$

(7, 24) est donc bien un supercarré d'ordre 2.

b. Afin d'obtenir un supercarré d'ordre 2 commençant par 3, il faut trouver deux carrés parfaits dont la différence est ~~égale à 9~~
~~égale à 9~~ égale à 9.

$$3^2 + x_2^2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - x_2^2 = 9$$

Or, cela n'est le cas seulement entre $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$.

C'est pourquoi (3, 4) est le seul supercarré d'ordre 2 commençant par 3.

c. On cherche ~~un~~ a tel que :

$$5^2 + a^2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - a^2 = 25$$

Pour $m = 13$ et $a = 12$, on a alors $169 - 144 = 25$.

a est donc égal à 12.

(5, 12) est un supercarré d'ordre 2.

En utilisant la même méthode, on trouve que $b = 84$.

Ainsi, $(13; 85)$ est un supercarré d'ordre 2.

d. On trouve une application géométrique des supercarrés d'ordre 2 dans le théorème de Pythagore.

3. Il y a 3 nombres, $n \geq 2$

5 est impair

$$5 > 12 > 84$$

$$5^2 + 12^2 + 84^2 = 25 + 144 + 7056$$

$$= 7225$$

$$= 85^2, 85 \in \mathbb{N}$$

$(5; 12; 84)$ est bien un supercarré d'ordre 3.

4.

5. Avec $x_1 = 7$, on obtient le supercarré d'ordre 4 suivant.

$$(7; 24; 312; 48984)$$

Ed Victor
1° A
IFS

Olympiades de mathématiques

Exercice 2:

1. a) On note Σ_A la somme des éléments de A et Σ_B , la somme des éléments de B. On a donc :

$$\Sigma_A = \frac{499 \times 500}{4} + \frac{1000 \times 1001}{4} - \frac{500 \times 501}{4} + \frac{1000}{4}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_A = 62375 + 250250 - 62625 + 250$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_A = \cancel{250250} + 250250$$

$$\Sigma_B = \frac{500 \times 501}{4} + \frac{999 \times 1000}{4} - \frac{499 \times 500}{4} + \frac{1000}{4}$$

$$\Sigma_B = 62625 + 249750 - 62375 + 250$$

$$\Sigma_B = \cancel{250250} + 250250$$

$\Sigma_A = \Sigma_B$; cette répartition répond donc bien à la définition.

b)

2. a) Si l'on a au moins quatre alternances, on a :

$$A = \{\dots, m, m+2, m+4, m+6, \dots\} \text{ et } B = \{\dots, m+1, m+3, m+5, m+7, \dots\}$$

$$\text{Ainsi, } m + m+4 = m+1 + m+3 = 2m+4.$$

Si l'on élimine les nombres m et $m+4$ de l'ensemble A, ainsi que le nombre $m+1$ et $m+3$ de l'ensemble B, les sommes des éléments de A et ~~de~~ de B restent égales.

b) Le raisonnement de la question a) fonctionne également dans ce cas.

~~4~~

c) Si l'on a exactement deux alternances, on a :

$$A = \{ \dots, m-1, m, m+2, m+4, m+5, \dots \} \text{ et } B = \{ \dots, m+1, m+3, \dots \}.$$

On obtient alors, $m-1 + m+5 = m+1 + m+3 = 2m+4$.

Si l'on élimine les nombres $m-1$ et $m+5$ de l'ensemble A et les nombres $m+1$ et $m+3$ de l'ensemble B , les sommes des éléments de A et de B restent égales.

d)